Expression des $\zeta(2k)$ (230, 243, 246)

FGN Analyse 2 p. 310

thm : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de Bernoulli, ie l'unique suite vérifiant

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$$ pour $z\in\mathbb{C}$ et proche de 0. On a $\forall k\in\mathbb{N}^*$

$$\zeta(2k) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

démo : Soit $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$ avec $x\in\,]-\pi,\pi]$, $z\in\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ et $\varphi$ $2\pi$-périodique.

Étape 1 : Développement en série de Fourier de $\varphi$.

Comme $\varphi$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut calculer ses coefficients de Fourier pour $n\in\mathbb{Z}$,

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\frac{z}{2\pi}-in}\left[e^{\frac{zx}{2\pi}}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{z/2}-e^{-z/2}}{z-2in\pi}\cdot(-1)^n$$

Comme $\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le thm de Dirichlet, on a

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(\varphi)\, e^{inx} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\varphi(x^+)+\varphi(x^-)}{2} \quad (*)$$

Étape 2 : Développement en série entière de $f(z) = \dfrac{z}{e^z-1}$

Pour $x=\pi$, on a $\lim_{x\to\pi^+}\varphi(x) = e^{-z/2}$ et $\lim_{x\to\pi^-}\varphi(x) = e^{z/2}$

Donc, par $(*)$, on a $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \frac{\underbrace{e^{in\pi}}_{=(-1)^n}}{z-2in\pi} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

Or $$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{e^z-1}$$

Or $$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-2i\pi n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{z+2i\pi n}{z^2+4\pi^2n^2} = \frac{1}{z}+\sum_{n\geq 1}\frac{z+2i\pi n+z-2i\pi n}{z^2+4\pi^2n^2} = \frac{1}{z}+2\sum_{n\geq 1}\frac{z}{z^2+4\pi^2n^2}$$

Donc $$\boxed{f(z) = \frac{z}{e^z-1} = z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+2\sum_{n\geq 1}\frac{z}{z^2+4\pi^2n^2}\right) = 1-\frac{z}{2}+2\sum_{n\geq 1}\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}}$$

Pour $|z| < 2\pi$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{z}{2\pi n}\right| < 1$ donc

$$\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \left(\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \left(\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^{k+1}$$

On réindexe et on a : $\displaystyle \frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \left(\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^k = \sum_{k\geq 1} u_{n,k}$

avec $u_{n,k} = (-1)^{k-1}\left(\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^k$ pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$. On a alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} u_{n,k}$.

On veut intervertir les sommes :

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} |u_{n,k}| = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \left(\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}\right)^k = \sum_{n\geq 1} \frac{\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}}{1-\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}} = \sum_{n\geq 1} \frac{|z|^2}{4\pi^2n^2-|z|^2} < +\infty \text{ (série de Riemann)}$$

Par le thm de Fubini-Tonelli, $(u_{n,k})_{\substack{n\geq 1\\ k\geq 1}}$ est sommable et par le thm de Fubini, on a

$\forall z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 2\pi$

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} u_{n,k} = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}}\right) z^{2k}.$$

On remarque que $f$ admet un prolongement par continuité en $0$ défini par $f(0) = 1$.

Étape 3 : Expression des $\zeta(2k)$.

Par unicité du DSE de $f$, on a pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{b_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \cdot 2 \quad \text{donc} \quad \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!\, 2} (2\pi)^{2k} b_{2k}$$

Questions : Expression des $\zeta(2k)$

- les limites ?

$$\lim_{x\to\pi^-} \varphi(x) = \varphi(\pi) = e^{z/2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi^+} \varphi(x) \overset{\text{par périodicité de } \varphi}{=} \lim_{x\to-\pi^+} \varphi(x) = e^{-z/2}$$

- $f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n\geq1} \frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$ ?

On a $$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n\geq1} \frac{z}{z^2+4\pi^2n^2}$$

donc $$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2\sum_{n\geq1} \frac{z}{z^2+4\pi^2n^2}$$

Ainsi $$f(z) = \frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n\geq1} \frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}.$$